Choix des investissements avec prise en compte du risque systémique

Bernard Lapeyre Emile Quinet

21 février 2014

1 Position du problème

Soit un investissement dont le coût de construction, mesuré en euro constants, est $I(t)$ si il est réalisé à l'instant t, et dont les avantages, mesurés à l'instant t en Euro constants sont $a(t)$. L'utilité de ces avantages, comme la désutilité du coût, dépendent de la richesse de la collectivité à l'année où ils se réalisent : un Euro gagné a d'autant plus de valeur qu'on est pauvre. Pour traduire cette variation de l'utilité retirée d'un Euro en fonction de la richesse on pondère les avantages exprimés en euros constants par une fonction décroissante de la richesse. Des considérations théoriques, comme le souci de simplicité, conduisent à prendre comme facteur de pondération un coefficient de la forme : $Y(t)^{-\gamma}$, où γ est un coefficient positif (les valeurs les plus courantes le situent aux alentours de 2).

Dans ces conditions, la VAN de l'investissement, exprimée en termes d'utilité et non plus d'euro, s'écrit sous la forme :

$$VAN(T) = \int_T^{+\infty} a(t)Y(t)^{-\gamma}e^{-\delta t}dt - I(T)Y(T)^{-\gamma}e^{-\delta T}$$

Expression où δ est un coefficient représentant la préférence pour le présent, et où les fonctions $a(t)$, $Y(t)$ et $I(t)$ sont aléatoires.

Le problème est de déterminer la décision optimale d'investissement : faut-il faire l'investissement, et si oui, quand ? On va d'abord rappeler la solution dans le cas déterministe, puis on abordera la solution aléatoire.

Solution dans le cas déterministe On supposera pour simplifier que les trois fonctions $a(t)$, $Y(t)$ et $I(t)$ sont exponentielles :

$$\begin{aligned} d\log(Y(t)) &= \mu dt, \\ d\log(a(t)) &= g dt, \\ d\log(I(t)) &= k dt. \end{aligned}$$

Alors

$$VAN(T) = \int_T^{+\infty} a(0)e^{gt}Y(0)^{-\gamma}e^{-\gamma\mu t}e^{-\delta t}dt + I(0)Y(0)^{-\gamma}e^{kT}e^{-\gamma\mu T}e^{-\delta T}$$

où encore :

$$VAN(T) = \int_T^{+\infty} a(0)Y(0)^{-\gamma}e^{(g-\gamma\mu-\delta)t}dt + I(0)Y(0)^{-\gamma}e^{(k-\gamma\mu-\delta)T}$$

Cette fonction a un extremum en un point T qui annule $\frac{dVAN(T)}{dT}$, ce qui se réécrit :

$$a(0)e^{gT} + (k-\gamma\mu-\delta)I(0)e^{kT} = 0,$$

ou encore

$$\frac{a(T)}{I(T)} = \gamma\mu + \delta - k.$$

Le point déterminé par cette équation correspond à un maximum, si la dérivée seconde est négative, condition qui se réécrit dans ce cas sous la forme

$$a(0)Y(0)e^{(g-\gamma\mu-\delta)T}\left[(g-\gamma\mu-\delta)-(k-\gamma\mu-\delta)\right] > 0.$$

Il est alors facile de vérifer que si $g > k$, c'est bien le cas.

Cette condition assure en outre que $VAN(T)$ est positif.

On voit que $Y(0)$ est un paramètre de calage et peut être pris librement, par exemple égal à l'unité, et que l'expression $(\delta + \gamma\mu)$ correspond à un taux d'actualisation.

Solution dans le cas aléatoire Si maintenant les trois fonctions $a(t)$, $Y(t)$ et $I(t)$ sont supposé suivre des mouvements aléatoires, on doit résoudre un problème de choix d'un temps d'arrêt optimal. On va se placer dans ce dernier cas, et faire l'hypothèse que les logarithmes des trois fonctions précitées sont des mouvements browniens :

$$\begin{aligned} d\log(Y(t)) &= \mu dt + \sigma_1 dW_1(t), \\ d\log(a(t)) &= g dt + \sigma_2 dW_2(t), \\ d\log(I(t)) &= k dt + \sigma_3 dW_3(t). \end{aligned}$$

On supposera que les nouvements browniens sont corrélés de la façon suivante, $\bar{W}_t^1$, $\bar{W}_t^2$, $\bar{W}_t^3$ étant 3 browniens indépendants :

$$\begin{aligned} W_t^1 &= \bar{W}_t^1 \\ W_t^2 &= \rho\bar{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^2 \\ W_t^3 &= \rho^I\bar{W}_t^1 + \sqrt{1-(\rho^I)^2}W_t^3 \end{aligned}$$

On cherche à maximiser $\mathbf{E}(VAN(\tau))$ où :

$$VAN(\tau) = \int_\tau^{+\infty} e^{-\delta t}a(t)Y(t)^{-\gamma}dt - e^{-\delta\tau}I(\tau)Y(\tau)^{-\gamma}.$$

parmi tous les temps aléatoires τ tenant compte de l'information disponible à l'instant donné. Techniquement on parle de temps d'arrêt par rapport à un filtration (qui résume le passé des trois trajectoires de a, Y et I jusqu'en t) $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, a_s, I_s, s \leq t)$.

On remarque que, d'après la propriété de Markov (forte) du processus (a, I, Y), on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_\tau^{+\infty} e^{-\delta t} a(t)Y(t)^{-\gamma} dt | \mathcal{F}_\tau\right) &= \mathbf{E}_{\tau, a(\tau), I(\tau), Y(\tau)}\left(\int_\tau^{+\infty} e^{-\delta t} a(t)Y(t)^{-\gamma} dt\right) \\ &= e^{-\delta\tau} a(\tau)Y(\tau)^{-\gamma}\mathbf{E}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\delta s + gs + \sigma_2 W_s^2 - \gamma\mu s - \gamma\sigma_1 W_s^1} ds\right).\end{aligned}$$

On peut alors expliciter la dernière intégrale en tenant compte de l'hypothèse sur les corrélations entre les mouvements browniens (W^2, W^1) et l'on obtient finalement :

$$\mathbf{E}\left(\int_\tau^{+\infty} e^{-\delta t} a(t)Y(t)^{-\gamma} dt \middle| \mathcal{F}_\tau\right) = \frac{e^{-\delta\tau} a(\tau)Y(\tau)^{-\gamma}}{\delta_1},$$

où :

$$\delta_1 = \delta + \gamma\mu - g - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2^2.$$

avec

$$\bar{\sigma}_2^2 = \sigma_2^2 + \gamma^2\sigma_1^2 - 2\gamma\rho\sigma_1\sigma_2$$

On en déduit une formule simplifiée pour l'espérance de la VAN :

$$\mathbf{E}\left(VAN(\tau)\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\delta\tau} Y(\tau)^{-\gamma}\left[\frac{a(\tau)}{\delta_1} - I(\tau)\right]\right) \tag{1}$$

Remarque Notons que si on impose que la date de réalisation de l'investissement est l'instant actuel (c'est l'hypothèse implicite faite dans le chapitre relatif au risque et au système d'actualisation dans le corps du rapport), on retrouve la formule donnant le taux d'actualisation risqué citée dans le rapport :

$$r = r_f + \beta\phi,$$

avec :

$$r_f = \delta + \gamma\mu - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2 \text{ et } \phi = \gamma\sigma^2,$$

et le coefficient β étant le coefficient de régression entre les avantages et le PIB. En effet on a alors, pour tout t :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{-\delta t} a(t)Y(t)^{-\gamma}\right) &= \mathbf{E}\left(a(0)Y(0)^{-\gamma} e^{-\delta t + gt + \sigma_2 W_t^2 - \gamma\mu t - \gamma\sigma_1 W_t^1}\right), \\ &= \left(a(0)e^{gt + \frac{1}{2}\sigma_2^2}\right)\left(Y(0)^{-\gamma} e^{-\delta t - \gamma\mu t - \frac{1}{2}(\gamma^2\sigma_1^2 - 2\rho\gamma\sigma_1\sigma 2)t}\right).\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, la première accolade sous le signe somme représente l'espérance mathématique des avantages à chaque instant t, compte tenu de la valeur de ces avantages à l'instant 0, où ils sont connus. La deuxième accolade représente l'effet à l'instant t d'un taux d'actualisation, qui est la somme du taux sans risque :

$$r_f = \delta t - \gamma\mu t - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_1^2,$$

et du produit d'une prime de risque $\phi = \gamma\sigma_1^2$, par le coefficient de la régression de $a(t)$ sur $Y(t)$: $\beta = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

On note $u(a_0, Y_0, I_0)$ la fonction de valeur sur problème d'arrêt optimal :

$$u(a_0, Y_0, I_0) = \sup_{\tau, \mathcal{F}_t \text{t.a.}} \mathbf{E}(VAN(\tau)).$$

Un résultat classique d'arrêt optimal (voir par exemple [6]) permet alors d'exprimer un temps d'arrêt optimal sous la forme :

$$\tau_{\text{opt}} = \inf\left\{t \geq 0, u(a(t), Y_t, I_t) = Y_t^{-\gamma}\left[\frac{a(t)}{\delta_1} - I(t)\right]\right\}$$

Nous allons maintenant explicter plus avant la fonction u en utilisant le théorème de Girsanov.

Pour cela, il est nécessaire de mener quelques calculs. On commence par définir L_t par :

$$L_T = \frac{I(T)Y(T)^{-\gamma}}{\mathbf{E}\left(I(T)Y(T)^{-\gamma}\right)}.$$

Pour T réel fini on a, bien sûr, $L_T \geq 0$ et $\mathbf{E}(L_T) = 1$. Un calcul simple, prenant en compte la corrélation entre W^1 et W^3, donne :

$$\mathbf{E}\left(I(T)Y(T)^{-\gamma}\right) = I_0 Y_0^{-\gamma} e^{(k-\gamma\mu)T + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_3^2 T},$$

où $\bar{\sigma}_3^2 = \sigma_3^2 + \gamma^2\sigma_1^2 - 2\rho_I\gamma\sigma_1\sigma_3$. Puis

$$L_T = e^{\sigma_3 W_T^3 - \gamma\sigma_1 W_T^1 - \frac{t}{2}\bar{\sigma}_3^2}.$$

Lorsque τ est un temps d'arrêt fini, on peut alors réécrire $\mathbf{E}\left(VAN(\tau)\right)$ sous la forme :

$$\mathbf{E}\left(VAN(\tau)\right) = Y_0^{-\gamma}\mathbf{E}\left(L_\tau e^{-\delta_2\tau}\left(\frac{1}{\delta_1}A(\tau) - I_0\right)\right)$$

où $\delta_2 = \delta - k + \gamma\mu - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_3^2$ et où l'on désigne par A le processus :

$$A(t) = \frac{a(t)}{(I(t)/I_0)} = a_0 e^{(g-k)t + \sigma_2 W_t^2 - \sigma_3 W_t^3}.$$

En posant, $\bar{\bar{\sigma}}_2 = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\rho\rho_I\sigma_2\sigma_3}$ et

$$\bar{\bar{W}}_t^2 = \frac{\sigma_2 W_t^2 - \sigma_3 W_t^3}{\bar{\bar{\sigma}}_2},$$

on constate que A peut s'écrire sous la forme

$$A(t) = a_0 e^{(g-k)t + \bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\bar{W}}_t^2},$$

où $\bar{\bar{W}}^2$ est un mouvement brownien standard. Par ailleurs, en définissant un nouveau mouvement brownien $\bar{\bar{W}}^3$ par :

$$\bar{\bar{W}}_t^3 = \frac{\sigma_3 W_t^3 - \gamma\sigma_1 W_t^1}{\bar{\sigma}_3^2},$$

on peut écrire, L_T sous la forme :

$$L_T = e^{\bar{\sigma}_3 \bar{\bar{W}}_T^3 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_3^2 T}.$$

Par ailleurs un calcul simple montre que :

$$\mathbf{E}\left(\bar{\bar{W}}_t^3 \bar{\bar{W}}_t^2\right) = \rho_3 t,$$

où

$$\rho_3 = \frac{(\sigma_3\rho_I - \gamma\sigma_1)(\rho\sigma_2 - \rho_I\sigma_3) - \sigma_3^2(1-\rho_I^2)}{\bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\sigma}_3}.$$

On en déduit par un argument reposant sur le caractère gaussien du couple de processus $(\bar{\bar{W}}^3, \bar{\bar{W}}^2)$ que :

$$\bar{\bar{W}}_t^3 = \rho \bar{\bar{W}}_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^\perp$$

où $W^\perp$ est un mouvement brownien indépendant de $\bar{\bar{W}}^2$. Le théorème de Girsanov (voir [4], chapitre 4 pour un enoncé et [3] pour une démonstration) nous dit que si T est un réel fini on peut définir une probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$ sur $\sigma(\mathcal{F}_t, t \leq T)$ en posant :

$$\tilde{\mathbf{E}}(X) = \mathbf{E}(L_T X).$$

et que, sous cette probabilité $\tilde{\mathbf{P}}$, le couple $(\tilde{W}_t^2, \tilde{W}_t^\perp, t \leq T)$ où :

$$\tilde{W}_t^2 = \bar{\bar{W}}_t^2 - \rho_3 \bar{\sigma}_3 t,$$

est consitué de mouvements browniens standards indépendants.

Maintenant considérons un temps d'arrêt τ borné par T, on a si l'on note $\mu_2 = g - k + \rho_3 \bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\sigma}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(VAN(\tau)) &= Y_0^{-\gamma} \mathbf{E}\left[L_\tau e^{-\delta_2 T}\left(\frac{a_0}{\delta_1} e^{\mu_2\tau + \bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\bar{W}}_\tau^2} - I_0\right)\right] \\
&= Y_0^{-\gamma} \mathbf{E}\left[L_T e^{-\delta_2 T}\left(\frac{a_0}{\delta_1} e^{\mu_2\tau + \bar{\bar{\sigma}}_2 \tilde{W}_\tau^2} - I_0\right)\right] \\
&= Y_0^{-\gamma} \tilde{\mathbf{E}}\left(e^{-\delta_2 T}\left(\frac{a_0}{\delta_1} e^{\mu_2\tau + \bar{\bar{\sigma}}_2 \tilde{W}_\tau^2} - I_0\right)\right).
\end{aligned}$$

Cette derniere expression nous montre que l'on peut calculer le $u(a_0, I_0, Y_0) = \sup_{\tau \text{t.a.}} \mathbf{E}\left(VAN(\tau)\right)$ sous la forme :

$$u(a_0, I_0, Y_0) = Y_0^{-\gamma} \bar{u}(a_0, I_0).$$

où

$$\bar{u}(a_0, I_0) = \sup_{\tau \text{t.a.}} \tilde{\mathbf{E}} \left(e^{-\delta_2 T} \left(\frac{a_0}{\delta_1} e^{\mu_2 \tau + \bar{\bar{\sigma}}_2 \tilde{W}_\tau^2} - I_0 \right) \right)$$

On peut alors expliciter $\bar{u}$ à l'aide du cas élèmentaire, en prenant pour paramêtres (j, C, μ, σ, X_0) le valeurs calculées grâce aux formules (successives) suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_2^2 = \sigma_2^2 + \gamma^2 \sigma_1^2 - 2\rho\gamma\sigma_1\sigma_2 \\ \delta_1 = \delta + \gamma\mu - g - \dfrac{1}{2}\bar{\sigma}_2^2 \\ \bar{\sigma}_3^2 = \sigma_3^2 + \gamma^2 \sigma_1^2 - 2\rho_I \gamma\sigma_1\sigma_3 \\ \delta_2 = \delta + \gamma\mu - k - \dfrac{1}{2}\bar{\sigma}_3^2 \\ \bar{\bar{\sigma}}_2^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\rho\rho_I\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_3 = \dfrac{(\sigma_3\rho_I - \gamma\sigma_1)(\rho\sigma_2 - \rho_I\sigma_3) - \sigma_3^2(1-\rho_I^2)}{\bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\sigma}_3} \\ \mu_2 = g - k + \rho_3 \bar{\bar{\sigma}}_2 \bar{\sigma}_3 \\ j = \delta_2 \\ C = I_0 \\ \mu = \mu_2 \\ \sigma = \bar{\bar{\sigma}}_2 \end{cases}$$

Une fois ceci fait on peut calculer le $x^*(\sigma)$ correspondant à ce modèle par la formule (en prenant en compte que $C = I_0$) :

$$x^*(\sigma) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2j\sigma^2} - \mu}{\sqrt{\mu^2 + 2j\sigma^2} - \mu - \sigma^2} I_0 (j - \mu - \sigma^2/2)$$

et le temps d'arrêt optimal du problème initial s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau^* &= \inf \left\{ t \geq 0, u(a(t), Y_t, I_t) = Y_t^{-\gamma} \left(\frac{a(t)}{\delta_1} - I(t) \right) \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0, \bar{u}(a(t), I_t) = \frac{a(t)}{\delta_1} - I(t) \right\}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la forme particulière de $\bar{u}$, on peut réécrire ce temps d'arrêt sous la forme :

$$\tau^* = \inf \left\{ t \geq 0, a(t) \geq I_t \frac{x^*(\sigma)}{I_0} \right\}. \tag{2}$$

Les simulations effectuées à partir de cette formule font apparaître les traits suivants :

– le taux de rentabilité immédiate justifiant la réalisation de l'investissement dépend très peu du facteur β
– Si on introduit dans la formule en cause les valeurs historiques, tirées des statistiques existantes, des écart-type et corrélations entre variables, on trouve une prime de risque très faible, beaucoup plus faible que celle retenue dans le rapport ; on retrouve le "equity premium puzzle" de la littérature.
– Pour retrouver une prime de risque de l'ordre de celle retenue dans le rapport, il faut multiplier les écart-type (essentiellement l'écart-type de la série $Y(t)$) par un coefficient de l'ordre de 2 à 3.
– Notons que cette attitude consistant à ajuster des paramètres pour faire coïncider les prévisions d'un modèle avec des données constatées sur un marché est d'usage courant dans un contexte financier.
– Enfin, il résulte de simulations effectuées à partir de ces formules que le taux de rentabilité immédiate déclanchant la réalisation est relativement peu sensible aux paramètres liés aux avantages, et se situe dans un voisinage étroit autour de 4,5%.

2 Appendice : le cas classique

Nous donnons en réfèrence les résultats du cas élèmentaire qui est utilisé plus haut.

Description du modèle aléatoire On suppose que X est la solution de

$$d \log(X_t) = \mu dt + \sigma dW_t,$$

– où W_t est un mouvement brownien (c'est à dire le modèle le plus simple (gaussien) permettant de décrire un aléa variant au cours du temps).
– σ qualifie la taille de l'aléa. $\sigma =$ prend le nom de volatilité dans le cas des modèles financiers.
– pour des raisons techniques, le paramètre économique pertinent de dérive est plutôt $\mu' = \mu + \sigma^2/2$ que μ , car

$$dX_t = X_t \left(\mu' dt + \sigma dW_t\right).$$

L'espérance de la VAN On choisit comme critère à optimiser l'espérance de la VAN. C'est un choix qui suppose que l'on est neutre au risque.

La simplicité du modèle permet de calculer cette espérance de façon explicite :

$$\mathbf{E}\left(VAN(T)\right) = \mathbf{E}\left(\int_T^{+\infty} e^{-jt} X_t dt - Ce^{-jT}\right) = \int_T^{+\infty} e^{-jt} \mathbf{E}(X_t) dt - Ce^{-jT}.$$

Comme X_t est une variable aléatoire gaussienne $\mathbf{E}(X_t)$ se calcule sans difficulté, et l'espérance de la VAN s'en déduit facilement, si l'on suppose que l'on part de

x en T, la VAN prend alors la forme $V(T,x)$ donnée par :

$$V(T,x) = \frac{xe^{-jT}}{j - \mu - \sigma^2/2} - Ce^{-jT}.$$

Le caractère markovien de X permet alors de montrer que

$$\mathbf{E}\left(VAN(\tau)\right) = \mathbf{E}\left(V(\tau, X_\tau)\right).$$

Ce qui simplifie notablement le problème d'optimisation qui va suivre.

Le problème d'optimisation Il nous faut alors trouver τ un, *temps d'arrêt* (nous ne prenons des décisions qu'en fonction du passé) qui maximise

$$\mathbf{E}(VAN(\tau)) = \mathbf{E}\left(V(\tau, X_\tau)\right) = \mathbf{E}\left(e^{-j\tau}\left(\frac{X_\tau}{j - \mu - \sigma^2/2} - C\right)\right).$$

Ce problème est un problème classique d'arrêt optimal (qui ressemble beaucoup à celui que l'on traite pour calculer une option perpétuelle américaine de type "put" ou "call"). Il est bien connu que :

- l'on sait résoudre ce type de problème *théoriquement* pour une grand variété de modèle.
- l'on sait le résoudre *numériquement* (plus ou moins efficacement) pour des modèles markoviens généraux.
- l'on sait le résoudre *explicitement* que pour très peu de modèle. C'est le cas ici, ce qui simplifie grandement le traitement.

Résultat de l'optimisation Nous ne développons pas en détail la façon dont se problème d'optimisation se traite en détail, nous nous contentons de décrire le résultat. τ_{opt} se calcule de la façon suivant :

$$\tau_{opt} = \inf\left\{t \geq 0, X_t \geq x^*(\sigma)\right\}. \tag{3}$$

où

$$x^*(\sigma) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2j\sigma^2} - \mu}{\sqrt{\mu^2 + 2j\sigma^2} - \mu - \sigma^2} C(j - \mu - \sigma^2/2)$$

Un développement limité de la formule définissant $x^*(\sigma)$ montre que $x^*(\sigma)$ tends vers x_0^* lorsque σ tend vers 0.

On peut vérifier que $x^*(\sigma) > x_0^*$: *l'aléa "retarde" le moment de la décision.*

Références

[1] A. Bensoussan, On the theory of option pricing, *Acta Applicandae Mathematicae*, 2, 1984, p. 139-158.

[2] I. Karatzas, On the pricing of American options, *Appl. Math. Optimization*, 17, 1988, p. 37–60.

[3] I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 113. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] D. Lamberton, B. Lapeyre, An Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman and Hall, Second Edition, Chapman and Hall, 2007.

[5] H.P. McKean, A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem of Mathematical Economics, Indust. Management Rev., 6, 32-39, 1965.

[6] P. van Moerbeke, On optimal stopping and free boundary problems, *Arch. Rational Mech. and Analysis*, 60, 1976, p.101-148.